

Apellido y Nombres:
 DNI: Padrón: Código Asignatura:
 Cursada. Cuatrimestre: Año: Profesor:
 Correo electrónico:

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Quinta fecha. 3 de septiembre de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Hallar $u(x, y)$ acotada que sea solución del problema de Dirichlet en el semicírculo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ con condición en la frontera $u(x, y) = 1$ para $y \geq 0$ y $u(x, y) = 0$ para $y < 0$. ¿Es única? Describir un sistema físico que pueda modelarse mediante este problema.

Ejercicio 2. Resolver:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t - u_{xx} &= 0 && \text{en } 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u_x(1, t) &= 0 && \text{para todo } t \geq 0 \\ u(x, 0) &= -4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right) + 3 \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi x}{2} \right) && \text{para todo } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) &= 0 && \text{para todo } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Hallar, si existen, las transformadas de Fourier de f y de g y calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2}{x^4} dx, \text{ previo estudio de convergencia.}$$

Ejercicio 4. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c} u_t + \phi(x) & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-|x|} & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (c > 0)$$

especificando las condiciones supuestas sobre ϕ .

Ejercicio 5. Obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que para $t \geq 0$ verifican:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + e^{-t}H(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

con $H(t)$ función de Heaviside.

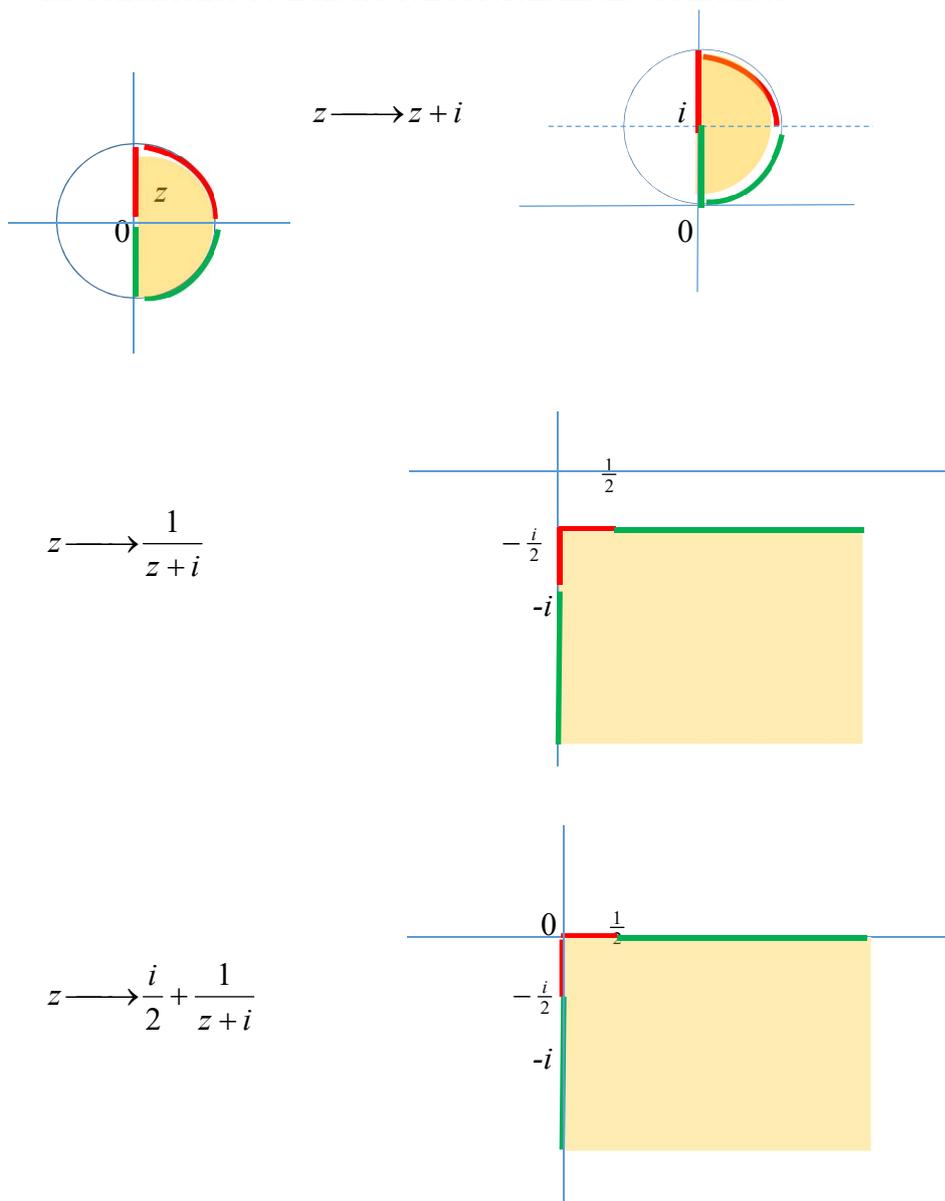
ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – QUINTA FECHA –03/09/2021
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1) Hallar $u(x,y)$ acotada que sea solución del problema de Dirichlet en el semicírculo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ con condiciones en la frontera $u(x,y) = 1$ para $y \geq 0$ y $u(x,y) = 0$ para $y < 0$. ¿Es única? Describir un sistema físico que pueda modelarse mediante este problema.

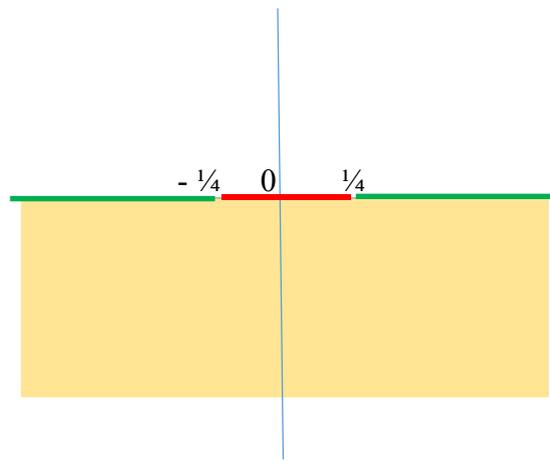
Resolución: Se trata del problema

$$\begin{cases} (i) \Delta u(x,y) = 0, & x^2 + y^2 < 1, x > 0 \\ (ii) u(x,y) = 1, & x^2 + y^2 = 1, y > 0 \quad \text{---} \\ (iii) u(x,y) = 0, & x^2 + y^2 = 1, y < 0 \quad \text{---} \end{cases}$$

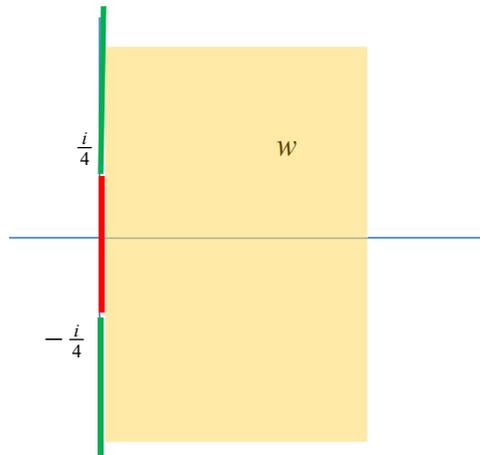
que se puede resolver mediante el método de las transformaciones conformes, dado que las condiciones de frontera son seccionalmente constantes.



$$z \longrightarrow \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{z+i} \right)^2$$



$$z \longrightarrow w = i \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{z+i} \right)^2$$



Ahora, buscamos u en la forma

$$u(x, y) = a \operatorname{Arg} \left(w(x+iy) - \frac{i}{4} \right) + b \operatorname{Arg} \left(w(x+iy) + \frac{i}{4} \right) + c$$

y determinamos las constantes a partir de las ecuaciones

$$1) \quad a \frac{\pi}{2} + b \frac{\pi}{2} + c = 0$$

$$2) \quad -a \frac{\pi}{2} + b \frac{\pi}{2} + c = 1$$

$$3) \quad -a \frac{\pi}{2} - b \frac{\pi}{2} + c = 0$$

y obtenemos $a = -\frac{1}{\pi}$, $b = \frac{1}{\pi}$ y $c = 0$. Por lo tanto,

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \left(w(x+iy) - \frac{i}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \left(w(x+iy) + \frac{i}{4} \right)$$

Finalmente, dado que $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\left(w(x+iy) - \frac{i}{4}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}\left(w(x+iy) + \frac{i}{4}\right) \leq \frac{\pi}{2}$, podemos utilizar la función arcotangente para el cálculo de los argumentos principales, es decir:

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi} \text{artg} \left(\frac{\text{Im}\left(w(x+iy) - \frac{i}{4}\right)}{\text{Re}\left(w(x+iy) - \frac{i}{4}\right)} \right) + \frac{1}{\pi} \text{artg} \left(\frac{\text{Im}\left(w(x+iy) + \frac{i}{4}\right)}{\text{Re}\left(w(x+iy) + \frac{i}{4}\right)} \right)$$

donde $w(x+iy) = i \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{x+(y+1)i} \right)^2$.

Esta es la única solución acotada del problema planteado, como se prueba en el apéndice de los Apuntes sobre Ecuaciones Diferenciales.

2) Resolver:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}(x, t) = 0 & : 0 < x < 1, t > 0 \\ (ii) u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & : t \geq 0 \\ (iii) u(x, 0) = -4\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right) & : 0 \leq x \leq 1 \\ (iv) \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right.$$

Resolución: Podemos utilizar el popular método de separación de variables – principio de superposición. La condición inicial (iii) sugiere buscar, directamente, soluciones de la forma

$$u(x, t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\alpha(t) + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\beta(t) \quad (*)$$

Observación: cualesquiera sean las funciones α y β , la función (*) verifica las condiciones de frontera (ii), como puede comprobarse directamente.

En la ecuación (i), e indicando la derivada respecto de t mediante un puntito (homenaje permanente a Don Isaac):

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ddot{\alpha}(t) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\ddot{\beta}(t) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\dot{\alpha}(t) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\dot{\beta}(t) + \\ & + \frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\alpha(t) + \frac{25\pi^2}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\beta(t) = 0 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left[\ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t) + \frac{\pi^2}{4}\alpha(t)\right] + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\left[\ddot{\beta}(t) + \dot{\beta}(t) + \frac{25\pi^2}{4}\beta(t)\right] = 0$$

Tenemos, entonces, las ecuaciones

$$\ddot{\alpha}(t) + \dot{\alpha}(t) + \frac{\pi^2}{4}\alpha(t) = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{\beta}(t) + \dot{\beta}(t) + \frac{25\pi^2}{4}\beta(t) = 0$$

cuyas soluciones generales (Álgebra II) son, respectivamente,

$$\alpha(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[A \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) \right]$$

$$\beta(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[C \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right) + D \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right) \right]$$

Por lo tanto, cualesquiera sean las constantes A , B , C y D , la función

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^{-\frac{t}{2}} \left[A \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) \right] \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right) e^{-\frac{t}{2}} \left[C \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right) + D \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2 - 1}\right) \right] \end{aligned}$$

verifica la ecuación (i) y también las condiciones de frontera (ii), como hemos observado previamente. Veamos ahora las condiciones iniciales (iii) y (iv):

$$u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)A + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)C : A = -4, C = 3$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^{-\frac{t}{2}} \left[A \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) \right] + \\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^{-\frac{t}{2}} \left[-A \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) \frac{\sqrt{\pi^2 - 1}}{2} + B \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2 - 1}\right) \frac{\sqrt{\pi^2 - 1}}{2} \right] + \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[C\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)+D\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\right]+$$

$$+\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[-C\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\frac{\sqrt{25\pi^2-1}}{2}+D\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\frac{\sqrt{25\pi^2-1}}{2}\right]$$

Para $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)A + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)B\frac{\sqrt{\pi^2-1}}{2} +$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)C + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)D\frac{\sqrt{25\pi^2-1}}{2} =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left[-\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{\pi^2-1}}{2}\right] + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)\left[-\frac{C}{2} + \frac{D\sqrt{25\pi^2-1}}{2}\right]$$

Es decir:

$$A = -4, C = 3, B = \frac{A}{\sqrt{\pi^2-1}} = -\frac{4}{\sqrt{\pi^2-1}} \text{ y } D = \frac{C}{\sqrt{25\pi^2-1}} = \frac{3}{\sqrt{25\pi^2-1}}$$

Por lo tanto, la solución del problema es

$$u(x,t) = -4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi^2-1}}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{\pi^2-1}\right)\right]$$

$$+ 3\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)e^{-\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{25\pi^2-1}}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\sqrt{25\pi^2-1}\right)\right]$$

3) Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Hallar, si existen, las transformadas de Fourier de f y de g y calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2}{x^4} dx, \text{ previo estudio de convergencia.}$$

Resolución: Es evidente que f es seccionalmente continua y absolutamente integrable, por lo tanto admite transformada de Fourier. Ahora, estudiemos la existencia de la transformada de Fourier de g , que es claramente continua en $\mathfrak{R} - \{0\}$. Veamos si lo es en 0. Para todo $x \neq 0$, es

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots\right) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\right)}{x^2} = \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)x^5 - \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right)x^7 \dots}{x^2} = \\ &= \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right)x^5 + \dots \end{aligned}$$

y por lo tanto g es continua en $x = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$. Ahora, respecto de la existencia de su transformada de Fourier, para cada real $b > 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b g(x)e^{-i\omega x} dx &= \int_{-1}^1 g(x)e^{-i\omega x} dx + \int_{-b}^{-1} g(x)e^{-i\omega x} dx + \int_1^{+b} g(x)e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_{-1}^1 g(x)e^{-i\omega x} dx + \int_{-b}^{-1} \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx - \int_{-b}^{-1} \frac{\text{sen}(x)}{x^2} e^{-i\omega x} dx + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx - \int_1^b \frac{\text{sen}(x)}{x^2} e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

La primera integral no es impropia, pues g es continua; las integrales tercera y quinta convergen absolutamente (cuando $b \rightarrow +\infty$), pues para todo $x \neq 0$: $\left| \frac{\text{sen}(x)e^{-i\omega x}}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$.

Mediante el cambio de variable de integración $x = -t$ en la segunda integral, la suma de las integrales segunda y cuarta nos queda

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{-1} \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx &= \int_b^1 \frac{\cos(-t)}{-t} e^{i\omega t} (-dt) + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_b^1 \frac{\cos(t)}{t} e^{i\omega t} dt + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx = -\int_1^b \frac{\cos(t)}{t} e^{i\omega t} dt + \int_1^b \frac{\cos(x)}{x} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_1^b \frac{\cos(x)}{x} [e^{-i\omega x} - e^{i\omega x}] dx = -2i \int_1^b \frac{\cos(x)\text{sen}(\omega x)}{x} dx \end{aligned}$$

La convergencia de esta integral (cuando $b \rightarrow +\infty$) puede probarse mediante el criterio de Dirichlet (página 9 de los Apuntes sobre Integrales Impropias). Hemos comprobado la existencia de la transformada de Fourier de g en el sentido del valor principal, es decir:

la existencia de $vp \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\omega x} dx$ para todo $\omega \in \mathfrak{R}$.

Ahora, calculemos:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 xe^{-i\omega x} dx \stackrel{\omega \neq 0}{=} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{xe^{-i\omega x}}{-i\omega} \right] + \frac{e^{-i\omega x}}{i\omega} \right\} dx = \\
&= \left[\frac{xe^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{x=-1}^{x=1} + \frac{1}{i\omega} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{-i\omega} - (-1)e^{i\omega}}{-i\omega} + \frac{1}{i\omega} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{x=-1}^{x=1} = \\
&= \frac{e^{-i\omega} + e^{i\omega}}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{\omega^2} = i \frac{e^{-i\omega} + e^{i\omega}}{\omega} - \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} = \\
&= 2i \frac{\cos(\omega)}{\omega} - 2i \frac{\sen(\omega)}{\omega^2} = 2i \frac{\omega \cos(\omega) - \sen(\omega)}{\omega^2}
\end{aligned}$$

Ahora, para $\omega = 0$, $\hat{f}(0) = \int_{-1}^1 x dx = 0$ y resulta, finalmente,

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega \cos(\omega) - \sen(\omega)}{\omega^2} & \text{si } \omega \neq 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

Es decir: $\hat{f}(\omega) = g(\omega)$. Ahora, f es seccionalmente continua y admite derivadas laterales finitas en todos los puntos de su dominio, por lo tanto podemos, aplicar el Teorema de Inversión (página 5 de los Apuntes sobre la Transformación de Fourier): para todo $x \in \mathfrak{R}$ se verifica

$$\frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$$

Indiquemos con \mathcal{f} la función del segundo miembro, es decir:

$$\mathcal{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Entonces, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad x \in \mathfrak{R}$. Por lo tanto, para

todo $x \in \mathfrak{R}$: $\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = 2\pi f(-x)$, y renombrando las variables obtenemos la transformada de Fourier de g :

$$\hat{g}(\omega) = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-it\omega} dt = 2\pi f(-\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \omega = -1 \\ -\omega & \text{si } -1 < \omega < 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } \omega = 1 \\ 0 & \text{si } \omega > 1 \end{cases}$$

Finalmente, la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[x \cos(x) - \text{sen}(x)]^2}{x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$ se puede

probar observando que g es continua (lo hemos probado arriba) y que para $|x| > 1$, es

$$\frac{[x \cos(x) - \text{sen}(x)]^2}{x^4} \leq \frac{(|x|+1)^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{|x|^3} + \frac{1}{x^4}$$

Por lo tanto, la integral converge y para calcularla podemos utilizar la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[x \cos(x) - \text{sen}(x)]^2}{x^4} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \quad (\text{Teorema de Parseval}) \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

4) Dada una constante real $c > 0$ y una función $\phi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, resolver

$$\begin{cases} (i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \phi(x) & : \quad -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ (ii) u(x, 0) = e^{-|x|} & : \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

especificando las condiciones supuestas sobre ϕ .

Resolución: Vamos a suponer que ϕ admite transformada de Fourier y que puede recuperarse mediante la fórmula de inversión. Ahora, respecto de la función u , vamos a suponer que es maravillosamente integrable y derivable. Aplicando la transformación de Fourier en (i) (respecto de x , obviamente):

$$-\omega^2 \hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + \hat{\phi}(\omega)$$

donde $\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$. Una de las condiciones que hemos supuesto sobre u es la posibilidad de intercambiar su transformación de Fourier con la derivación respecto de t . Ahora, multiplicando la ecuación

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + c\omega^2 \hat{u}(\omega, t) + c\hat{\phi}(\omega) = 0 \quad (*1)$$

por el factor integrante $e^{c\omega^2 t}$:

$$e^{c\omega^2 t} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) + e^{c\omega^2 t} c^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t) + e^{c\omega^2 t} c^2 \hat{\phi}(\omega) = 0$$

resulta que para todo $\omega \neq 0$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{c\omega^2 t} \hat{u}(\omega, t) + \frac{e^{c\omega^2 t}}{\omega^2} \hat{\phi}(\omega) \right] = 0$$

Dado que esto es válido para todo $t \in (0, +\infty)$, la función entre corchetes es constante respecto de t , es decir:

$$e^{c\omega^2 t} \hat{u}(\omega, t) + \frac{e^{c\omega^2 t}}{\omega^2} \hat{\phi}(\omega) = \alpha(\omega)$$

para alguna función α , es decir:

$$\hat{u}(\omega, t) = \alpha(\omega) e^{-c\omega^2 t} - \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2}, \quad \omega \neq 0, t \geq 0 \quad (*2)$$

Para $\omega = 0$, la ecuación (*1) queda $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, t) + c\hat{\phi}(0) = 0$, entonces existe una constante k tal que

$$\hat{u}(0, t) = -tc\hat{\phi}(0) + k, \quad t \geq 0 \quad (*3)$$

Ahora, de la condición inicial (ii):

$$\hat{u}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx \stackrel{(ii)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x| - i\omega x} dx = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

(la última igualdad es una cuenta bastante sencilla y puede verse en el Ejemplo 3 de los Apuntes Sobre la Transformada de Fourier, página 9). Reemplazando en (*2):

$$\frac{2}{1 + \omega^2} = \alpha(\omega) - \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2}$$

podemos despejar la función α y entonces, para todo $\omega \neq 0, t \geq 0$:

$$\hat{u}(\omega, t) = \left[\frac{2}{1 + \omega^2} + \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2} \right] e^{-c\omega^2 t} - \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^2} = \frac{2e^{-c\omega^2 t}}{1 + \omega^2} + \frac{e^{-c\omega^2 t} - 1}{\omega^2} \hat{\phi}(\omega) \quad (*4)$$

Obsérvese que:

(a) el primer término, $\frac{2e^{-c\omega^2 t}}{1 + \omega^2}$, es solución del caso $\hat{\phi} = 0$ (es decir: el caso homogéneo)

de la ecuación (*1) con la condición inicial $\hat{u}(\omega, 0) = \frac{2}{1 + \omega^2}$;

(b) el segundo término,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-c\omega^2 t} - 1}{\omega^2} \hat{\phi}(\omega) &= \frac{1}{\omega^2} \left[-c\omega^2 t + \frac{1}{2!} (c\omega^2 t)^2 - \frac{1}{3!} (c\omega^2 t)^3 + \dots \right] \hat{\phi}(\omega) = \\ &= \left[-ct + \frac{1}{2!} (ct)^2 \omega^2 - \frac{1}{3!} (ct)^3 \omega^4 + \dots \right] \hat{\phi}(\omega) \end{aligned}$$

tiende a $-ct\hat{\phi}(0)$ cuando $\omega \rightarrow 0$. Por lo tanto, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{u}(\omega, t) \stackrel{(*4)}{=} 2 - ct\hat{\phi}(0)$.

Comparando con (*3), la elección $k = 2$ implica la continuidad de \hat{u} en la semirrecta de ecuación $\omega = 0$ de su dominio.

Finalmente, obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2e^{-c\omega^2 t}}{1 + \omega^2} + \frac{e^{-c\omega^2 t} - 1}{\omega^2} \hat{\phi}(\omega) \right] e^{i\omega x} d\omega$$

(alguna cuenta más se puede hacer).

5) Obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que para $t \geq 0$ verifican

$$\begin{cases} (1) & x_1'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ (2) & x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + e^{-t}H(t) \end{cases}$$

con las condiciones $x_1(0) = x_2(0) = 0$, siendo H la función de Heaviside.

Resolución: La matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable en los reales y por lo tanto el sistema se puede resolver con facilidad utilizando los métodos aprendidos en Álgebra II. Nosotros utilizaremos en esta resolución la transformación de Laplace.

Transformando el sistema y utilizando mayúsculas para las transformadas de Laplace de las funciones involucradas, tenemos (dadas las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$):

$$\begin{cases} (\tilde{1}) & sX_1(s) = -3X_1(s) + X_2(s) \\ (\tilde{2}) & sX_2(s) = X_1(s) - 2X_2(s) + \frac{1}{s+1} \end{cases}, \quad \text{Re}(s) > -1$$

Acomodando un poco las ecuaciones

$$\begin{cases} (\tilde{1}) & (s+3)X_1(s) - X_2(s) = 0 \\ (\tilde{2}) & -X_1(s) + (s+2)X_2(s) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

y despejando:

$$X_1(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{s+1} & s+2 \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 5} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 5s + 5)}$$

$$X_2(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ -1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 5} = \frac{s+3}{(s+1)(s^2 + 5s + 5)}$$

Factorizamos

$$(s+1)(s^2+5s+5) = (s+1)(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)$$

donde $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{5})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-5 - \sqrt{5})$ son las raíces de $s^2 + 5s + 5$ (es decir: los autovalores de la matriz A ¡oh, casualidad!). Es importante observar que $\lambda_2 < \lambda_1 < -1$, pues estamos trabajando con la condición $\text{Re}(s) > -1$ y por lo tanto $s^2 + 5s + 5 \neq 0$.

Ahora, cualesquiera sean las constantes a, b y c (distintas) se verifican las identidades

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} = \frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (*1)$$

$$\frac{a+3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c+3}{(c-a)(c-b)} = \frac{s+3}{(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (*2)$$

para cada $s \in \mathbb{C} - \{a, b, c\}$ (vieja y conocida descomposición en fracciones simples). Por lo tanto,

$$X_1(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \quad \text{y} \quad X_2(s) = \frac{a+3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c+3}{(c-a)(c-b)}$$

donde $a = -1$, $b = \lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $c = \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Finalmente, entonces,

$$x_1(t) = \left[\frac{e^{at}}{(a-b)(a-c)} + \frac{e^{bt}}{(b-a)(b-c)} + \frac{e^{ct}}{(c-a)(c-b)} \right] H(t)$$

$$x_2(t) = \left[\frac{(a+3)e^{at}}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+3)e^{bt}}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+3)e^{ct}}{(c-a)(c-b)} \right] H(t)$$

Observación: para comprobar que $x_1(0^+) = x_2(0^+) = 0$ debemos verificar que

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$y \quad \frac{a+3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c+3}{(c-a)(c-b)} = 0$$

Para ahorrar cuentas, podemos utilizar las identidades (*1) y (*2). Multiplicando estas identidades por $s - a$, para cada $s \in \mathbb{C} - \{a, b, c\}$ resulta

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \left(\frac{s-a}{s-b} \right) + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \left(\frac{s-a}{s-c} \right) = \frac{1}{(s-b)(s-c)}$$

$$\frac{a+3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+3}{(b-a)(b-c)} \left(\frac{s-a}{s-b} \right) + \frac{c+3}{(c-a)(c-b)} \left(\frac{s-a}{s-c} \right) = \frac{s+3}{(s-b)(s-c)}$$

Tomando s real (por ejemplo) y tendiendo a ∞ obtenemos

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$y \quad \frac{a+3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b+3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c+3}{(c-a)(c-b)} = 0$$

respectivamente.
